# Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

*Адлер. 14 октября 2009.*

*Первый тур. Лига тактик*

**1.** Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ докажите неравенство

$$\frac{a^3+bc}{a+b}+\frac{b^3+ca}{b+c}+\frac{c^3+ab}{+a}\geqslant 2\sqrt{abc}.$$

**2.** Найдите все такие многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого простого числа $p$ и любых натуральных $u$ и $v$, для которых $uv-1$ делится на $p$, число $f(u)f(v)-1$ также делится на $p$.

**3.** 67 студентов отвечают на 6 вопросов, пронумерованных числами 1, 2, …, 6. За правильный ответ на вопрос номер $i$ студент получает $i$ баллов, а за неправильный ответ (или за отсутствие ответа) он получает $-i$ баллов. Докажите, что найдутся четверо студентов, набравших поровну баллов.

**4.** Окружность с центром $O$ касается всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$. Лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $K$, а лучи $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $L$. Точки $X$ и $Y$, лежащие на отрезках $OA$ и $OC$ соответственно, таковы, что $2\angle XKY=\angle AKC$. Докажите, что $2\angle XLY=\angle ALC$.

**5.** Найдите все такие простые числа $p$, $q$ и $r$, что $p+q=(p-q)^r$.

**6.** Существуют ли три равных девятиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие две стороны которых не совпадают?

**7.** В однокруговом турнире участвовало 20 волейбольных команд. Любые 2 команды встретились между собой ровно 1 раз и одна из этих команд победила. Оказалось, что для любых $n\geqslant 4$ различных команд $P_0$, $P_1$, $P_2,\ldots$, $P_{n-1}$ таких, что $P_{i-1}$ выиграла у $P_i$ при всех $i=1,\,2,\,\ldots,\,n-2$, команда $P_0$ также выиграла и у $P_{n-1}$. Докажите, что эти команды можно так занумеровать числами от 1 до 20, что при любых $a\geqslant b+3$, команда $a$ победила команду $b$.

**8.** Пусть $H$ — ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$, $O$ — центр его описанной окружности. Известно, что $AB<BC$, прямая $BO$ пересекает сторону $AC$ в точке $P$, а прямая, проходящая через точку $H$ и параллельная прямой $BO$, пересекает сторону $AC$ в точке $Q$. Докажите, что $OP=OQ$.

**9.** Вася и Петя играют в крестики-нолики на бесконечном клетчатом листе бумаги по следующим правилам: Вася ставит крестики, а Петя нолики. Вася хочет поставить 4 крестика в виде квадата $2\times 2$. Сможет ли Петя ему помешать?

**10.** Найдите все функции $f(x)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f(f(f(x))+y)=f(f(y))+x$$

при $x,\,y\in\mathbb{R}$.